



Εισαγωγή στα Μαθηματικά Βιολογικών Συστημάτων

Στόχοι σεμιναρίου και προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα:

Σκοπός του σεμιναρίου είναι να καταστήσει τους φοιτητές ικανούς να ποσοτικοποιήσουν και να ερμηνεύσουν δυναμικές αλληλεπιδράσεις στα βιολογικά συστήματα. Με την ολοκλήρωση των μαθημάτων, οι φοιτητές θα είναι σε θέση να εντοπίζουν στη βιολογία ένα δυναμικό σύστημα, να κατανοούν έννοιες όπως αυτή της ομοιόστασης και της θετικής ή αρνητικής ανάδρασης, και να μπορούν να εξηγούν πως μηχανισμοί ανάδρασης μπορούν να οδηγήσουν σε π.χ. ταλαντώσεις των επιπέδων γλυκόζης στο αίμα. Θα μάθουν να συντάσσουν απλές διαφορικές εξισώσεις και να προβλέπουν την πορεία ενός βιολογικού φαινομένου στη βάση της ανάλυσης των εξισώσεων. Τέλος, με χρήση των μαθηματικών εργαλείων, θα μπορούν να εξηγούν πώς συγκεκριμένοι ομοιοστατικοί μηχανισμοί διατηρούν την κατάσταση ισορροπίας στην οποία βρίσκονται, πώς η διαταραχή τους μπορεί να οδηγήσει σε ασθένεια ή πώς η κατάσταση ομοιόστασης μπορεί να μεταβληθεί από την ασθένεια.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Η έννοια της συνάρτησης μιας μεταβλητής. Όριο συνάρτησης. Καρτεσιανές συντεταγμένες. Γραφική παράσταση συνάρτησης. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις (ημιτόνου, συνημιτόνου).

Επιθυμητές (αλλά όχι απαραίτητες) γνώσεις: Παράγωγος συνάρτησης, γραμμική άλγεβρα (πίνακες).

Διδάσκουσα: Επίκουρη Καθηγήτρια Δάφνη Μανουσάκη, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά
Επισκέπτρια Ερευνήτρια, Εθνικό Ινστιτούτο Κώφωσης και άλλων διαταραχών επικοινωνίας (NIDCD), National Institutes of Health, Bethesda, Maryland.
Εκπαίδευση: B.A. Mathematics, Oxford University 1991, Ph.D. Applied Mathematics, University of Washington 1996.

Email: daphne@ece.tuc.gr,

Περιγραφή μαθημάτων

Μαθηματική περιγραφή μεταβολών

Η έννοια της συνάρτησης. Βρόχοι ανάδρασης. Εισροές - εκροές. Μαθηματική περιγραφή μεταβολής. Διατυπώνοντας τις αλληλεπιδράσεις σε μαθηματικές (διαφορικές) εξισώσεις. Παραδείγματα από την αλληλεπίδραση θηράματος - θηρευτή, προσβολή κυττάρου από ιό, επιδημιολογία, χημεία, κ.α. Η δυναμική του συστήματος θα περιγραφεί κατ' αρχήν μέσω πεδίου διευθύνσεων σε μία ή σε δύο διαστάσεις και θα σχεδιαστούν γραφικά πιθανές λύσεις.

Παράγωγοι και ολοκληρώματα.

Οι παράγωγοι ως ρυθμοί μεταβολής. Μια γεωμετρική ερμηνεία. Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας. Γραμμική προσέγγιση μιας συνάρτησης. Υπολογισμός παραγώγων. Ολοκληρώματα: Προσθέτοντας στοιχειώδη ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Η γεωμετρία του αθροίσματος Riemann.

Συμπεριφορά ισορροπίας

Εντοπίζοντας τα σημεία ισορροπίας. Ευστάθεια των σημείων ισορροπίας. Ανάλυση: πεδία διευθύνσεων, δοκιμαστικά σημεία, γραμμική ανάλυση ευστάθειας.

Πολλαπλά σημεία ισορροπίας σε δύο διαστάσεις. Παραδείγματα από τη βιολογία ή την οικολογία.

Ευστάθεια μη γραμμικών συστημάτων. Βιολογικοί διακόπτες. Το οπερόνιο λακτόζης. Διακλαδώσεις σημείων ισορροπίας.

Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα: ταλαντώσεις.

Ταλαντώσεις στη χημεία και στη βιολογία. Μηχανισμοί ταλαντώσεων. Παραδείγματα: Ο αναπαραγωγικός άξονας: υποθάλαμος - υπόφυση - γονάδες. Ο έλεγχος του CO₂ μέσω αναπνοής. Ινσουλίνη και γλυκόζη. Περιοδική έκφραση γονιδίων.

Διακλάδωση και έναρξη ταλαντώσεων. Ευσταθείς ταλαντώσεις σε οικολογικό μοντέλο. Διακλαδώσεις Hopf.

Σύγγραμμα αναφοράς:

Modeling Life, by A. Garfinkel, J. Shevtsov, and Y. Guo. Springer, 2017.

Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 75489187

Αξιολόγηση συμμετεχόντων:

Το σεμινάριο είναι προαιρετικό και δεν αποτελεί μέρος του προγράμματος σπουδών, επομένως η όποια βαθμολογία, δεν θα αποτελέσει μέρος της αξιολόγησης του φοιτητή. Παρ' όλα αυτά, για όποιον ενδιαφέρεται, θα υπάρχουν κάθε εβδομάδα προτεινόμενες ασκήσεις οι οποίες θα συζητώνται σε μάθημα της επόμενης εβδομάδας.

Επίσης, προαιρετικά, θα προσφερθεί μια πρόοδος και μια τελική εξέταση.

Ημερολόγιο μαθημάτων

1η εβδομάδα

Δευτέρα 6 Μαΐου 2019

Εισαγωγή στα Μαθηματικά των Βιολογικών Συστημάτων.

Ταλαντώσεις στη βιολογία ως αποτέλεσμα ανάδρασης. Θετική και αρνητική ανάδραση. Τα πρώτα “εργαλεία”: Η έννοια της μαθηματικής συνάρτησης. Σύστημα μιας μεταβλητής και συστήματα περισσότερων μεταβλητών. Χώρος κατάστασης. Γραφική αποτύπωση μεταβλητών στο χώρο κατάστασης.

Εισαγωγή στις εξισώσεις μεταβολής. Ανάλογες ποσότητες. Εισροές - Εκροές.

Τρίτη 7 Μαΐου 2019

Μαθηματική περιγραφή μεταβολής.

Παραδείγματα από την οικολογία, τη χημεία, τη βιολογία, την επιδημιολογία.

Πράξεις μεταβλητών στο χώρο κατάστασης.

2η εβδομάδα

Δευτέρα 13 Μαΐου 2019

Γεωμετρική αποτύπωση της μεταβολής στο χώρο κατάστασης. Πεδίο διευθύνσεων και τροχιές στο χώρο κατάστασης. Ασκήσεις - παραδείγματα.

Τρίτη 14 Μαΐου 2019

Εισαγωγή στις παραγώγους. Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής. Ορισμός της παραγώγου. Υπολογισμός παραγώγου - μερικά παραδείγματα. Συμβολισμός.

Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου

3η εβδομάδα

Δευτέρα 20 Μαΐου 2019

Η παράγωγος στον υπολογισμό γραμμικής προσέγγισης. Η παράγωγος μιας συνάρτησης. Η παράγωγος ως συνάρτηση. Βασικοί κανόνες παραγωγίσης.

Τρίτη 21 Μαΐου 2019

Βασικοί κανόνες παραγωγίσης (συνέχεια). Παραδείγματα.

Το άθροισμα Riemann: αθροίζοντας πολλές, απειροελάχιστες ποσότητες.

4η εβδομάδα

Δευτέρα 27 Μαΐου 2019

Το άθροισμα Riemann - γεωμετρική ερμηνεία. Το ορισμένο ολοκλήρωμα. Ένα θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού και η εφαρμογή του στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων.

Τρίτη 28 Μαΐου 2019

Σημεία ισορροπίας: εύρεση σημείων ισορροπίας και μελέτη ευστάθειας. Η μέθοδος των σημείων δοκιμής. Γραμμική ανάλυση ευστάθειας. Το φαινόμενο Allee.

Τετάρτη 29 Μαΐου 2019

Ασκήσεις

5η εβδομάδα

Δευτέρα 3 Ιουνίου 2019

Σημεία ισορροπίας σε περισσότερες διαστάσεις. Είδη ευστάθειας σημείων ισορροπίας (ευσταθής κόμβος, ασταθής κόμβος, σαγματικό σημείο, ευσταθής σπείρα, ασταθής σπείρα, κέντρο). Σύστημα με πολλαπλά σημεία ισορροπίας - μελέτη της ευστάθειάς τους.

Τρίτη 4 Ιουνίου 2019

Σύστημα με πολλαπλά σημεία ισορροπίας - μελέτη της ευστάθειάς τους (συνέχεια). Μηδενοκλινείς. Παραδείγματα.

6η εβδομάδα

Δευτέρα 10 Ιουνίου 2019

Λεκάνες έλξης. Βιολογικοί διακόπτες. Διαγράμματα διακλαδώσεων. Τρία είδη διακλαδώσεων (supercritical, saddle-node, pitchfork).

Τρίτη 11 Ιουνίου 2019

Εισαγωγή στις ταλαντώσεις.

Το σύστημα μάζας - ελατηρίου. Γλωσσίδι κλαρινέτου. Ταλαντωτής Van der Pol.

Ελκυστές.

Οριακοί κύκλοι - ορισμός.

Μη γραμμικά φαινόμενα, ως προϋπόθεση οριακών κύκλων.

Παράδειγμα.

Μηχανισμοί ταλάντωσης:

A) Συστήματα αρνητικής ανάδρασης

B) Θεώρημα Poincare

Γ) Χρονική καθυστέρηση.

7η εβδομάδα

Δευτέρα 17 Ιουνίου 2019

Αργία (Αγίου Πνευματος)

Τρίτη 18 Ιουνίου 2019

Παραδείγματα ταλαντώσεων: Έλεγχος CO₂ μέσω αναπνοής.

Ο ορμονικός άξονας υποθάλαμου - υπόφυσης - γονάδων.

Ταλαντώσεις σε σύστημα ινσουλίνης - γλυκόζης.

Περιοδική έκφραση γονιδίων

Τετάρτη 19 Ιουνίου 2019

Διακλάδωση και αρχή ταλάντωσης. Γλυκόλυση. Ευσταθείς ταλαντώσεις σε ένα βιολογικό μοντέλο. Οι διακλαδώσεις Hopf. Ασκήσεις

8η εβδομάδα

Δευτέρα 24 Ιουνίου 2019

Επανάληψη - ασκήσεις

Τρίτη 25 Ιουνίου 2019

Επανάληψη - Ασκήσεις